

Chương 3: Dãy số - Cấp số cộng – Cấp số nhân

§1. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

A. GIÁO KHOA

Nguyên lý quy nạp toán học

Chứng minh mệnh đề $P(n)$ (với $P(n)$ phụ thuộc vào n) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq p$ (p là số tự nhiên cho trước), ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Kiểm chứng $P(n)$ đúng với $n = p$

Bước 2: Giả sử $P(n)$ đúng với $n = k$, ($k \geq p$). Chứng minh $P(n)$ đúng với $n = k + 1$.

Kết luận $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq p$.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1: Chứng minh các biểu thức sau đúng với mọi số tự nhiên n dương:

a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Lời giải:

a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, (1)

+) Với $n = 1$ thì ta có $1 = \frac{1.2}{2} \Rightarrow (1)$ đúng.

+) Giả sử (1) đúng với $n = k$, khi đó ta có $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

+) Ta sẽ chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$, tức là $1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Thật vậy, $1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) = (1 + 2 + 3 + \dots + k) + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 =$

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Vậy biểu thức đã cho đúng với $n = k + 1$.

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, (2)

+) Với $n = 1$ thì ta có $1^2 = \frac{1.2.3}{6} \Rightarrow (2)$ đúng.

+) Giả sử (2) đúng với $n = k$, khi đó ta có $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

+) Ta sẽ chứng minh (2) đúng với $n = k + 1$, tức là

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Thật vậy, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2) + (k+1)^2 =$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Vậy biểu thức (2) đúng.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng $3^n > n^2 + 4n + 5$ với mọi số tự nhiên $n \geq 3$.

Lời giải:

$$3^n > n^2 + 4n + 5, (3)$$

+) Với $n = 3$ thì ta có $3^3 > 3^2 + 4 \cdot 3 + 5 \Leftrightarrow 27 > 26 \Rightarrow (3)$ đúng.

+) Giả sử (3) đúng với $n = k$, khi đó ta có $3^k > k^2 + 4k + 5$

+) Ta sẽ chứng minh (3) đúng với $n = k + 1$ tức là $3^{k+1} > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5$

$$\text{Thật vậy, } 3^{k+1} = 3^k \cdot 3 > 3(k^2 + 4k + 5) = 3k^2 + 12k + 15 = (k^2 + 2k + 1) + 4(k+1) + 5 + 2k^2 + 6k + 5$$

$$= (k+1)^2 + 4(k+1) + 5 + 2k^2 + 6k + 5 > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5 \text{ do } 2k^2 + 6k + 5 > 0 \quad \forall k.$$

$$\text{Do đó ta được } 3^{k+1} > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5.$$

Vậy (3) đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 3$.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $7 \cdot 2^{2n-2} + 3^{2n-1}$ chia hết cho 5.

Lời giải:

Bài toán đúng với $n = 1$. Giả sử bài toán đúng với $n = k$ tức là $7 \cdot 2^{2k-2} + 3^{2k-1} : 5$.

Tiếp tục chứng minh bài toán đúng với $n = k + 1$, tức là $7 \cdot 2^{2k+2-2} + 3^{2k+2-1} : 5$

$$7 \cdot 2^{2k+2-2} + 3^{2k+2-1} = 4 \cdot 7 \cdot 2^{2k-2} + 9 \cdot 3^{2k-1} = 4(7 \cdot 2^{2k-2} + 3^{2k-1}) + 5 \cdot 3^{2k-1} : 5$$

Cứ như vậy, theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh.

§2. DÃY SỐ

A. GIÁO KHOA

1. Định nghĩa

a. Dãy số vô hạn

- Một hàm số u xác định trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số).
- Mỗi giá trị của hàm số u được gọi là một số hạng của dãy số.

+ $u(1)$: số hạng thứ nhất (số hạng đầu), kí hiệu là u_1

+ $u(2)$: số hạng thứ hai, kí hiệu là u_2

....

+ $u(n)$: số hạng thứ n (số hạng tổng quát), kí hiệu là u_n

Ta thường ký hiệu dãy số $u = u(n)$ bởi (u_n)

b. Dãy số hữu hạn

- Một hàm số u xác định trên tập $M = \{1; 2; \dots; m\}$ ($m \in \mathbb{N}^*$) được gọi là một dãy số hữu hạn.

+ u_1 : số hạng đầu (số hạng thứ nhất)

...

+ u_m : số hạng cuối

2. Cách cho dãy số: Có 3 cách

Cách 1: Cho dãy số bởi công thức của số hạng tổng quát.

Cách 2: Cho dãy số bởi hệ thức truy hồi (cho dãy số bằng quy nạp)

Cách 3: Diễn đạt bằng lời cách xác định mỗi số hạng của dãy số

3. Dãy số tăng, dãy số giảm

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n < u_{n+1}$

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > u_{n+1}$

Lưu ý: Phương pháp xét tính tăng, giảm của dãy số (u_n)

Cách 1: Lập hiệu $u_{n+1} - u_n$

- Nếu $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số tăng
- Nếu $u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số giảm

Cách 2: Nếu $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, lập tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số tăng
- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số giảm

4. Dãy số bị chặn

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq M$

Ví dụ 1. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$, tìm 5 số hạng đầu tiên của dãy số.

Dự đoán công thức u_n và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp?

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 1 \end{cases} \Rightarrow u_1 = 1; u_2 = u_1 + 3 = 4; u_3 = u_2 + 5 = 9; u_4 = u_3 + 7 = 16; u_5 = u_4 + 9 = 25$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = n^2,$$

a) $u_n = 2n + 3$

b) $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$

b) Ta có: $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}; u_{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n+1}{n}}$

Giả sử: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n+1}{n}} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \frac{n+1}{n} > 1 \Leftrightarrow n+1 > 4n \Leftrightarrow 3n < 1 \Rightarrow$ vô lý.

Vậy $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n \Rightarrow$ dãy số đã cho là dãy số giảm.

Ví dụ 4. Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

a) $u_n = \frac{1}{2n^2 - 3}$

b) $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

Lời giải:

a) $u_1 = -1$
 $\forall n \geq 2 \Rightarrow 2n^2 - 3 > 0 \Rightarrow u_n > 0, \forall n \geq 2$

Ta có: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n^2 - 3}{2(n+1)^2 - 3} < 1$ (do $n < n+1$) nên $u_n < u_{n-1} < \dots < u_2 = \frac{1}{5}$.

Vậy (u_n) bị chặn.

b) Ta dễ dàng thấy:

- $u_n > 0$ do đó (u_n) bị chặn dưới.
- Vì $n(n+1) \geq 2 \Leftrightarrow u_n \leq \frac{1}{2}$ do đó (u_n) bị chặn trên.

Vậy (u_n) bị chặn.